Las tesis fundamentales de Bertrand Russell en su intento de aritmetización de las matemáticas

Autor: Matos Campos, Carlos (Graduado Universitario en Matemáticas por la UNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia)).
Público: Profesores de Matemáticas, Estudiantes Universitarios. **Materia:** Matemáticas. **Idioma:** Español.

Título: Las tesis fundamentales de Bertrand Russell en su intento de aritmetización de las matemáticas.
Resumen
Este artículo expone de una manera introductoria las tesis de Bertrand Russell en su intento de fundamentación y aritmetización de las Matemáticas: La teoría del zigzag, La teoría de la limitación de tamaño, La teoría sin clases, La teoría simple de los tipos y La teoría ramificada de los tipos. Se parte de las ideas que llevaron a Bertrand Russell a intentar fundamentar la Matemática para posteriormente analizar cada una de sus tesis.
Palabras clave: clase, epistemología, función proposicional, lógica matemática, paradoja, tipos, Russell.

Title: The fundamental theses of Bertrand Russell in his attempt to arithmetization of mathematics.
Abstract
This article presents in an introductory way about the theses of Bertrand Russell in his attempt to justify and ahritmetization of Mathematics: The Zigzag theory, The theory of Size Limitation, The Classless theory, The simple theory of types and The ramified theory of types. It starts from the ideas that took to Bertrand Russell to try to justify and ahritmetization of Mathematics to later analyze each one of its theses.
Keywords: class, epistemology, propositional function, mathematical logic, paradox, types, Russell.

Recibido 2017-07-23; Aceptado 2017-07-26; Publicado 2017-08-25; Código PD: 086054

Logic is concerned with the real world, just as truly as zoology,
though with its more abstract and general features…

Bertrand Russell, Introduction to Mathematical Philosophy

En el Congreso Internacional de Filosofía, Lógica e Historia de la Ciencia de París de 1900, Russell tuvo conocimiento de los trabajos de Giuseppe Peano para convertir el concepto de «número» en un concepto lógico y creyó encontrar una base sólida para los fundamentos de las matemáticas basada en la idea de que la lógica no era una parte de las matemáticas sino que, al contrario, eran las matemáticas las que se reducían a la lógica: *las verdades matemáticas eran verdades lógicas*.

La idea de Russell era reducir una rama de las matemáticas tras otra a la lógica, empezando por la aritmética, debido a que creía en su *consistencia absoluta.* Cualquier sistema axiomático fundamental para las matemáticas como el que Russell quería desarrollar debía verificar tres propiedades: *consistencia, completud y decidibilidad*. *Consistencia* significa que nunca te encontrarás con contradicciones en tu sistema. Del sistema axiomático no puede deducirse al mismo tiempo una proposición y su negación: llueve y no llueve. *Completud* implica que si una proposición es verdadera, entonces el sistema siguiendo unas reglas tiene que ser capaz de demostrarla. *Decidibilidad* implica que dada cualquier proposición, existe algún procedimiento que nos dice si esa proposición es o no demostrable en el sistema. Russell observó que muchas ramas de las matemáticas, por ejemplo la geometría euclidiana, demostraban su consistencia (consistencia relativa) si la aritmética era consistente. Entonces, Russell pensó que si reducía la aritmética a la lógica, reduciría a su vez otras ramas de las matemáticas como la geometría euclidiana, pues dependían de la consistencia de la aritmética. Todas estas ideas quedaron plasmadas en su libro *The Principles of Mathematics* (1903), una primera versión de su programa logicista.

> Las Partes II-VII del libro se dedican a demostrar “que toda la matemática pura se ocupa exclusivamente con conceptos definibles en términos de un número muy pequeño de conceptos lógicos fundamentales, y que todas sus proposiciones se pueden deducir de un número muy pequeño de principios lógicos fundamentales” , mientras que la Parte I acomete la “tarea puramente filosófica” de

> elucidar "los conceptos fundamentales que la matemática acepta como indefinibles" (Russell 1903, Prefacio; 2ª ed., 1937, p. xv).
>
> (Roberto Torretti, El paraíso de Cantor, pág. 178)

The Principles of Mathematics resultó ser en palabras de Russell, "un tosco e inmaturo bosquejo del trabajo subsiguiente"[104], *Principia Mathematica* (1910- 13) una obra monumental y titánica que Russell escribe en colaboración con Alfred North Whitehead con el propósito de dar un desarrollo formal, en escritura conceptual, para precisar todas las ideas que Russell había plasmado en su libro *The Principles of Mathematics,* escrito de una manera informal con escasos términos matemáticos y dirigido principalmente a los filósofos. Para llevar a cabo su programa logicista de reducir la matemática a la lógica, Russell desarrolla el concepto lógico de *clase*. El concepto de *clase* está estrechamente ligado al concepto de *función proposicional*. Russell explica los conceptos de proposición y función proposicional:

> "Por «proposición» entenderemos ante todo una forma verbal que expresa lo que es verdadero o falso. Y decimos «ante todo» para no excluir otros símbolos no verbales o incluso los meros pensamientos cuando tengan un carácter simbólico… «dos y dos son cuatro» y «dos y dos son cinco» serán proposición…Una «función proposicional» es, de hecho, una expresión que contiene uno o más componentes indeterminados tales que, al asignárseles valores, la expresión se convierte en una proposición."
>
> B. Russell, *Introducción a la filosofía matemática*, pág. 137

La función proposicional se distingue de la proposición, sobre todo por el hecho de que la función proposicional es ambigua. Russell piensa que la ambigüedad no es una característica accidental de las funciones proposicionales sino que en palabras de Torretti[105]: "la característica esencial de una función es su ambigüedad". Por lo tanto, Φx es una función proposicional si, para cada valor de *x*, Φx es una proposición, bien determinada si *x* está dado y la clase C correspondiente a la función proposicional Φx es aquella formada por los objetos c tales que $c \in C$ si y sólo si Φc es una proposición verdadera.

Un ejemplo: dada la función proposicional Φx = "x es un filósofo", la clase de los filósofos, F, puede escribirse como $f \in F$ si y sólo si Φf es verdadera. Russell, en un principio creía que existía una relación biunívoca entre el concepto de clase y el concepto de función proposicional, de tal forma que dada una clase C existía una función proposicional Φx que la definía y viceversa. Pero mientras trabajaba en su programa logicista, descubrió un error que demostraba que el concepto de clase del que se había servido era contradictorio. Sin el concepto de clase resultaba imposible progresar desde la lógica a las matemáticas. Este error era debido a una paradoja que hoy en día se la conoce como la paradoja de Russell: la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas, $R= \{x | x \notin x\}$, la clase R definida por la función proposicional Φx = "x no es miembro de sí misma". Russell se pregunta: ¿la clase R pertenece a sí misma, es decir, $R \in R$ o no pertenece a sí misma, $R \notin R$?, si $R \notin R$ por la definición de la clase R tenemos que $R \in R$ y si $R \in R$ por la definición de R tenemos que $R \notin R$. $R \in R \leftrightarrow R \notin R$, es una contradicción. El descubrimiento entrañaba una seria amenaza al proyecto logicista de reducir la matemática a la lógica. Si su sistema axiomático generaba contradicciones, entonces su sistema no era consistente y no poseía valor alguno como instrumento de demostración, pues de una contradicción se puede demostrar cualquier cosa.

Un ejemplo: Si consideramos la regla de inferencia conocida como *implicación o condicional*: $p \rightarrow q$, siendo p y q dos proposiciones cualesquiera. Si p es verdadera para que: $p \rightarrow q$ sea verdadera, q también tiene que ser verdadera. Pero si p es *falsa* para que: $p \rightarrow q$ sea verdadera, q puede ser *falsa* o *verdadera*. Por eso de una contradicción (algo falso) podemos deducir cualquier cosa. La conclusión que Russell sacó de su paradoja es que no todas las funciones proposicionales Φx generan una clase (las llamó no-predicativas) y otras que si la definen (las llamó predicativas). Russell necesitaba encontrar un criterio que le permitiera distinguir las funciones proposicionales no-predicativas de las funciones proposicionales predicativas y para ello bosquejo tres posibles soluciones con escaso éxito:

(a) *La teoría del zigzag*: Russell supone que si Φx es una función proposicional predicativa, su negación es predicativa $\sim \Phi x$, pero un desarrollo consistente de la teoría conllevaría establecer un sistema de axiomas capaces de demostrar cuando una función proposicional es predicativa. Para ello parte de la

[104] B. Russell*, La evolución de mi pensamiento filosófico*, pág. 76

[105] Torretti, *El Paraiso de Cantor*, pág. 192

idea de que todas las funciones proposicionales simples son predicativas y sólo algunas funciones proposicionales complicadas y extrañas no lo son. Con esta teoría, Russell, pretende establecer la existencia de una clase por el contenido (simple o complicado) de las funciones proposicionales pero en palabras de Torretti[106]: "cuando intentó precisar esta idea básica tuvo que formular axiomas excesivamente complicados y carentes de toda plausibilidad intrínseca".

(b) *La teoría de la limitación de tamaño*: esta teoría es opuesta a la teoría del zigzag, en ella Russell considera que una función proposicional define una clase no cuando su fórmula es suficientemente sencilla, sino cuando determina y marca con claridad los límites de una colección de objetos, pero entonces funciones proposicionales como Φx = "x es un ordinal" no serían predicativas porque ¿dónde está el límite de los ordinales?, quizás utilizando esta teoría podría ser ilegítimo considerar el ordinal ω. Russell no estaba por la labor de abandonar *la teoría intuitiva de conjuntos* que Cantor había desarrollado y abandono el desarrollo de la teoría de la limitación.

En 1905 encontró una solución con su *teoría de las descripciones* a un problema totalmente distinto y relacionado con la filosofía del lenguaje: el descubrimiento de que una proposición como «la esposa favorita del obispo de Roma» **(1)** puede ser correcta sintácticamente y al mismo tiempo no tener ningún sentido. Russell resolvió el problema considerando la expresión **(1)** como una abreviatura de otra proposición más larga: «$\exists x$ tal que $\psi(x)$»siendo $\psi(x)$ la propiedad: "esposa favorita del obispo de Roma". Como no existe ningún x que verifique la propiedad $\psi(x)$ la proposición **(1)** podemos considerarla como falsa. Esto le hizo concebir la esperanza de encontrar una solución a su paradoja y trato de fusionar sus ideas de la filosofía del lenguaje en su filosofía matemática dando lugar a *la teoría sin clases*.

(c) *La teoría sin clases* (1906): habiendo eliminado el concepto de «número» en beneficio del concepto lógico de clase, Russell cree posible eliminar el concepto de clase en pos de un concepto lógico más primitivo. Russell considera que las clases no son más que meras abreviaturas lingüísticas o simbólicas y que no son auténticos objetos como lo son sus miembros por ello explica que en proposiciones donde se menciona a una clase lo que realmente se está mencionando es a los miembros de la clase y por lo tanto puede entenderse estas proposiciones como proposiciones acerca de sus miembros. Russell deja de considerar "viable" esta teoría por considerar muy complicado el procedimiento de eliminación del concepto clase.

Llegados a este punto sin salida, Henri Poincaré, gran matemático francés y totalmente contrario a la concepción filosófica de la matemática que tenía Russell, creyó ver la solución a la paradoja de Russell y a otras paradojas como la de Cantor o Berry[107], con la idea del *círculo vicioso*, según el cual lo que presupone el todo de una colección no puede formar parte de esa colección, como "todos los españoles son mentirosos"[108] siendo yo (español) quien realizo esta afirmación. Por fin, la regla buscada por Russell para diferenciar las funciones proposicionales predicativas de las no-predicativas parecía que comenzaba a tomar forma. De una manera informal podríamos decir que la idea que subyace en el *círculo vicioso* es que aquellas funciones proposicionales cuya formación no involucre o presuponga totalidades a las cuales ellas mismas pertenezcan serán consideradas predicativas.

---

[106] Torretti, *El Paraiso de Cantor*, pág. 183

[107] *La paradoja de Cantor*: sea C el conjunto de todos los conjuntos. Todo subconjunto de C es asimismo un elemento de C, por lo tanto el conjunto potencia de C es un subconjunto de C. Pero si esto es cierto, esto implica que la cardinalidad del conjunto potencia es menor e igual a la cardinalidad de C. Pero esto contradice el teorema de Cantor, el cual afirma que la cardinalidad de C debe ser menor que la cardinalidad del conjunto potencia.

La paradoja de Berry: consideremos la frase: "el entero positivo más pequeño que no se puede describir en castellano con menos de dieciocho palabras", la frase parece describir a un entero δ, pero δ es nombrado por una frase que sólo tiene 17 palabras y por lo tanto no responde a la descripción.

[108] Una de las muchas variantes de la paradoja del mentiroso.

Russell hace suya la idea de Poincaré e intenta caracterizar esta idea con más precisión denominándola *el principio del círculo vicioso*:

> "Lo que envuelve el *todo* de una colección (**all** of a collection) no puede ser miembro de esa colección"; o, recíprocamente: "Si, en caso que cierta colección tuviera un total, tendría miembros definibles sólo en términos de ese total, dicha colección no tiene un total"

(Russell, *Logic and Knowledge*, pág.63)

Este principio impone un orden jerárquico a las funciones proposicionales y Russell ve en el principio del círculo vicioso la justificación necesaria para su *teoría simple de los tipos*. Russell pensó que sus razonamientos en la teoría de los tipos estarían totalmente justificados, en un sentido lógico, en la medida que fuese una expresión equivalente del principio del círculo vicioso.

♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣

Antes de desarrollar la *teoría simple de los tipos*, me detendré unos instantes para explicar los conceptos, *ámbito de verdad y ámbito de significación* en una función proposicional Φx, así como el desarrollo de una nueva terminología que Russell y Whitehead introdujeron para el desarrollo de su teoría.

Dada una función proposicional Φx, Russell considera su ámbito de verdad como la *clase* de los objetos *β* tales que Φβ es una proposición verdadera, {β: Φβ es verdadera}. El ámbito de significación de una función proposicional Φx son aquellos objetos β que son válidos al ser sustituidos en Φx, dando lugar a una proposición Φβ verdadera o falsa. Lo que Russell quiere decir, es que dado el argumento *x* de Φx, éste no puede ser cualquier objeto sino que tiene que cumplir unos criterios, unas características, es decir un ámbito de significación para Φx, de manera que al sustituirlo en Φx tenga sentido como proposición y una proposición sólo tiene sentido si es verdadera o falsa, en cualquier otro caso no sería una proposición.

> Los ámbitos de significación forman tipos, esto es, si x pertenece al ámbito de significación de Φx, existe una clase de objetos, el tipo de x, todos los cuales también tienen que pertenecer al ámbito de significación de Φx, como quiera que varíe Φ; y el ámbito de significación es siempre, o bien un tipo único, o una suma de varios tipos completos.

(Russell, *the Principles of Mathematics)*

El símbolo Φx tiene una doble ambigüedad pues denota ambiguamente tanto la función proposicional en sí como un valor indeterminado de la función. En la práctica nos será necesario distinguir entre una función proposicional en sí y un valor indeterminado de ella. Para ello Russell considera una nueva terminología: Φz^ para denotar a la función proposicional en sí y Φx para denotar ambiguamente a los valores (proposiciones) de la función proposicional Φa, Φb, Φc…

♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣

LA TEORÍA SIMPLE DE LOS TIPOS

La idea básica de la teoría simple de los tipos es establecida por Russell en el apéndice B de *the Principles of Mathematics:* si él ámbito de significación de una función proposicional Φz^ da lugar a objetos de un tipo t_i, su ámbito de verdad, la clase de los objetos β tales que Φβ es una proposición verdadera, es un objeto que pertenece a otro tipo diferente t_j. Por lo tanto no podemos considerar la clase asociada a Φz^, {β: Φβ es verdadera}, como un argumento de dicha función, Φ{β: Φβ es verdadera} no está permitido.

En este contexto, la paradoja de Russell no tiene cabida, pues si consideramos la función proposicional Φz^= {x|x∉x}, la clase (su ámbito de verdad) asociada a esta función proposicional, serían aquellos objetos *x* que hiciesen verdadera la proposición "x∉x", es decir R= {x|x∉x es verdadero} pero como la clase R no es del mismo tipo que el ámbito de significación de Φz^, entonces R no puede ser argumento de Φz^ y no podemos sustituir *x* por R en Φz^ y preguntarnos: ¿R∉R?, la paradoja ni siquiera se puede expresar, no tiene sentido decir ΦR o ΦΦz^.

La paradoja de Cantor se elimina de la misma manera, si consideramos la función proposicional Φz^= {X | card (X) ≤ card[109](P(X)} y los objetos indeterminados X (en este caso consideramos conjuntos), la clase asociada a esta función proposicional Φz^ sería C, el conjunto de todos los conjuntos, porque todos los conjuntos X verifican el teorema de Cantor, card (X) ≤ card (P(X)) y hacen verdadera la proposición "card (X) ≤ card (P(X))" pero como C no puede ser argumento de Φz^ no tiene sentido hacernos la pregunta : ¿ card (C) ≤ card (P(C))?. En *Principia Mathematica*, Russell intenta caracterizar con más precisión la idea anterior:

> Por lo tanto, "Φx" sólo tiene un significado bien definido (es decir, bien definido excepto en cuanto es de su esencia ser ambigua) si los objetos Φa, Φb, Φc, etc., están bien definidos. En otras palabras, una función no es una función bien definida a menos que todos sus valores ya estén bien definidos. De esto se desprende que ninguna función puede tener entre sus valores algo que presuponga a la función, pues si lo tuviera, no podríamos considerar que los objetos ambiguamente denotados por la función están definidos mientras la función no estuviera definida, mientras que, a la inversa, como acabamos de ver, la función no puede estar definida mientras no lo estén sus valores. Este es un caso particular, pero tal vez el más fundamental, del principio del círculo vicioso.
>
> (Whitehead y Russell, *Principia Mathematica,* tomo *I,* pág 39)

La teoría simple de los tipos, cuando consideramos funciones proposicionales con una sola variable (*los atributos*), impone una jerarquía de tipos y exige que toda función proposicional sea del tipo inmediatamente superior al de sus argumentos, es decir si los individuos (a, b, c…) son objetos del tipo 0, las propiedades de los individuos (funciones proposicionales Φz^, ζz^, γ z^…) son objetos del tipo 1, las propiedades de propiedades de los individuos (funciones proposicionales ΨΦz^,ΓΦz^,ξΦz^…) son objetos del tipo 3, y así sucesivamente. Russell lo expresa de una manera muy parecida: si Φz^ es una función proposicional de una variable cuyo ámbito de significación es el tipo t, entonces Φz^ es un objeto del tipo (t). De esta manera, Russell, establece una jerarquía isomórfica entre los tipos y la serie de los números naturales, para ello basta considerar a todos los individuos como el tipo 0, el tipo 1 sería (0), el tipo 2 sería ((0)), el tipo 3 sería (((0))), y así sucesivamente.

La jerarquía se complica un poco cuando las funciones proposicionales son de dos o más variables (*las relaciones*), ya no podemos ordenarlas numéricamente como en el caso de una sola variable, si Φz_1^… z_n^ es una función proposicional de n variables z_1^,…, z_n^ el ámbito de significación de Φz_1^… z_n^ será el producto cartesiano t_1 x… x t_n y el tipo de la función será (t_1 x… x t_n). Reproduciré uno de los ejemplos que nos da Torretti[110] al respecto: "si ψ*ab* se lee «Pedro ama a Teresa», ψz^x^ es una relación binaria del tipo (0,0)".

La teoría simple de los tipos bloquea la paradoja de Russell (también otras paradojas como la de Cantor) ya que sólo puede ser argumento de Φz^ = "x∉x" un *x* que sea de un tipo inferior al de la función proposicional Φz^, esto implica que la función proposicional Φz^ no puede ser argumento de ella misma. Sin embargo la teoría no disuelve la paradoja de Berry (también otras paradojas como la del mentiroso) por no distinguir órdenes dentro de cada tipo.

Torretti[111] nos da un ejemplo práctico muy interesante: "sea t un tipo cualquiera y F una colección de funciones cuyo ámbito de significación es t. Si *a* es un objeto cualquiera del tipo t, entonces la oración "*a* satisface todas las funciones Φz^ de la colección F" expresa una proposición. Si en ella reemplazamos la constante a por la variable *x* obtenemos una fórmula representativa de una función que llamaré ψz^. Pero entonces, aunque el ámbito de significación de ψz^ también es el mismo tipo t, el principio del círculo vicioso no permite que ψz^ pertenezca a F, puesto que ψz^ se refiere a la totalidad de F. No hay derecho a hablar de *un* tipo (0) al que pertenecerían *todas* las funciones cuyo ámbito de significación es el tipo 0 de los individuos. Cualquier totalidad de funciones de una variable que admitan individuos como argumento tiene necesariamente que *excluir* algunas funciones con ese ámbito de significación."

Si consideramos *f*(Φz^, x) una función proposicional de dos variables Φz^ y x, podemos considerar que la variable x (individuos) es del tipo 0 y la variable Φz^ (función proposicional) es del tipo 1. Si fijamos x con un valor concreto y

[109] Por *Card* considero la cardinalidad de un conjunto y por *P(X)* el conjunto potencia de un conjnto.

[110] Torretti, *El paraíso de Cantor*, pág. 194

[111] Torretti, *El paraíso de Cantor*, pág. 195

consideramos todas las variables $\Phi z\hat{}$, podemos crear una proposición P= $\forall \Phi z\hat{}$. $f(\Phi z\hat{}, x)$[112] porque x es un valor constante y la variable $\Phi z\hat{}$ utiliza el cuantificador $\forall$, implicado que son *todas* las variables de la forma $\Phi z\hat{}$.

Si en $\forall \Phi z\hat{}.f(\Phi z\hat{}, x)$ no consideramos a *x* constante, obtendríamos una función proposicional $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$ de la variable x. Mientras cualquier función proposicional $\Phi z\hat{}$ tiene una variable de x "libre", la segunda función proposicional, $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$ tiene una variable x "ligada" por su definición, $\boldsymbol{\Phi} z\hat{} = \forall \Phi z\hat{}.\ f(\Phi z\hat{}, x)$. Ambas funciones proposicionales, $\Phi z\hat{}$ y $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$, tienen como variable a *x* y son del tipo 1 pero no las podemos considerar equivalentes tienen diferentes órdenes.

$\boldsymbol{\Phi} z\hat{} = \forall \Phi z\hat{}.\ f(\Phi z\hat{}, x)$ es una función proposicional de la variable x y a su vez envuelve una totalidad de valores de $\Phi z\hat{}$ (pues en una parte de la definición de $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$ aparece $\forall \Phi z\hat{}$) pero en virtud del principio del círculo vicioso ella misma $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$ (es una función proposicional de x, es decir, es una $\Phi z\hat{}$) no puede ser uno de los valores incluidos en la totalidad: $\forall \Phi z\hat{}$.

Esto nos lleva a la conclusión de que $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$ no es la totalidad de todas las funciones proposicionales $\Phi z\hat{}$ en las que *x* puede aparecer como argumento y nos hace pensar que $\boldsymbol{\Phi} z\hat{}$ y $\Phi z\hat{}$ siendo funciones proposicionales de la variable x (del mismo tipo 1) son de distinto orden (nivel), por lo tanto debemos admitir además de una jerarquía de tipos una jerarquía de órdenes.

LA TEORÍA RAMIFICADA DE LOS TIPOS

La teoría ramificada de los tipos establece distintos órdenes dentro del mismo tipo lógico, se dividen en órdenes los objetos de tipos superiores a 0. Las funciones proposicionales que pertenecen a cierto tipo no forman una totalidad, sino que pertenecen a distintos órdenes. Para montar la jerarquía de órdenes sobre la de tipos, Whitehead y Russell definen el concepto de *matriz*.

Una matriz es una función proposicional de n variables ($n \geq 1$) $\Phi z_1\hat{}\ldots z_n\hat{}$ que no contiene ninguna variable ligada (su argumento no depende o esta generada por alguna otra función proposicional). A partir de esta matriz $\Phi z_1\hat{}\ldots z_n\hat{}$ con los cuantificadores lógicos universal, $\forall$ y existencial, $\exists$ podemos derivar otras funciones proposicionales que no son matrices (pues tienen sus variables ligadas) por generalización universal o existencial sobre una de sus variables $z_k\hat{}$:

$\Psi z_1\hat{}\ldots z_{k-1}\hat{}\ z_{k+1}\hat{}\ldots z_n\hat{} = \forall z_k\ \Phi z_1\hat{}\ldots z_{k-1}\hat{}\ z_k\ z_{k+1}\hat{}\ldots zn\hat{}$ siendo $1 \leq k \leq n$. **(1)**

$\Upsilon z_1\hat{}\ldots z_{k-1}\hat{} z_{k+1}\hat{}\ldots z_n\hat{} = \exists z_k\ \Phi z_1\hat{}\ldots z_{k-1}\hat{}\ z_k\ z_{k+1}\hat{}\ldots zn\hat{}$ siendo $1 \leq k \leq n$. **(2)**

Una observación: la matriz $\Phi z_1\hat{}\ldots z_n\hat{}$ es una función proposicional de n variables libres y por derivación a través de los cuantificadores lógicos $\forall$ y $\exists$ sobre una de las variables z_k obtenemos dos funciones proposicionales **(1)** y **(2)** pero con n-1 variables ligadas. Si continuásemos el proceso de derivación recursivamente sobre **(1)** y **(2)** obtendríamos funciones proposicionales con una sola variable ligada. Torretti[113] matiza aún más: "Según Whitehead y Russell, «toda función posible que no sea una matriz se deriva de una matriz» por una o más generalizaciones (PM, I, 162)." La clave en la teoría ramificada está en comprender que con las funciones proposicionales $\Psi z_1\hat{}\ldots z_{k-1}\hat{} z_{k+1}\hat{}\ldots z_n\hat{}$ y $\Upsilon z_1\hat{}\ldots z_{k-1}\hat{} z_{k+1}\hat{}\ldots z_n\hat{}$ "creamos" los órdenes dentro de un mismo tipo.

Ahora desarrollaré el concepto de *orden* dentro de un tipo *t*. Una función proposicional de tipo *t* y orden *n* es aquella que contiene como variables a funciones proposicionales del tipo *t* y ordenes menores que *n* y por lo menos una variable de orden *n-1*. Los siguientes son ejemplos de funciones proposicionales del tipo 1 con distinto orden[114]: "x es idéntica a un individuo" (orden-1), "x tiene todas las propiedades de un gran general" (orden-2), "x tiene una propiedad que a su vez tiene la propiedad F" (orden-3), etcétera.

Me gustaría destacar que la teoría simple de los tipos introduce una jerarquía de objetos y exige que toda función proposicional sea del tipo inmediatamente superior al de sus argumentos mientras la teoría ramificada de los tipos asume la teoría simple de los tipos y dentro de un tipo *t* cualquiera, crea una jerarquía de ordenes por eso una función proposicional de tipo *t* y orden *n* puede tener como argumentos funciones proposicionales del tipo *t*. Un caso particular

---

[112] El punto, ".", en la expresión es el conector lógico "y". Russell y Whitehead lo escriben de otra manera: "$(\Phi).\ f(\Phi z\hat{}, x)$". Torretti*, El paraíso de Cantor,* pág 195

[113] Torretti*, El paraíso de Cantor,* pág 197

[114] Guillermo Hurtado, *Proposiciones russellianas*, pág. 213

son las funciones proposicionales que no contienen variables ligadas de orden superior a sus variables libres, Russell las llama funciones predicativas[115] y las representa con un símbolo de admiración: Φ!x, ψ! (x,y). La teoría ramificada de los tipos resuelve las paradojas de Russell y Cantor así como las paradojas del mentiroso y de Berry que en la teoría simple de los tipos no era posible. Como ejemplo cito la solución de la paradoja del mentiroso[116]:

"Cuando el mentiroso dice «estoy mintiendo», o bien habla sin sentido – en cuyo caso no hay paradoja –, o bien dice que una proposición *p* aseverada por él es falsa. Sea *p* de orden *n*. Entonces, la proposición "estoy mintiendo", que se refiere a *p*, es de orden superior a *n* y por lo tanto no puede ser idéntica a *p* (Russell LK, p. 79)."

Bibliografía

Libros

- Díaz Estévez, Emilio (1975), *El teorema de Gödel*, EUNSA.
- Diversos autores, *Bertrand Russell*, Editado por Nicholas Griffin.
- Garrido Garrido, Julián (2003), *Verdad matemática*, Nivola.
- Hurtado, Guillermo (1998), *Proposiciones russellianas*, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Marraud, Huberto (2009), *Bertrand Russell*, Montesinos.
- Mosterín, Jesús (2000), *Los lógicos*, Espasa Calpe.
- Russell, Bertrand (1988), *Introducción a la filosofía matemática*, Paidós.
- Stewart, Ian (2008), *Historia de las matemáticas*, Crítica.
- Strathern, Paul (2003), *Russell en 90 minutos*, Siglo XXI.
- Torretti, Roberto (1998), *El paraíso de Cantor,* Editorial Universitaria y Universidad Nacional Andrés Bello.
- Weinberg, J.R (1959), *Examen del positivismo lógico*, Aguilar.
-

Videos

- Du Sautoy, Marcus (2008), *Historia de las matemáticas: Al infinito y más allá*, Open University Worldwide/BBC.
- Savater, Fernando, *La aventura del pensamiento: Bertrand Russell*, Fuente: Youtube.
-

Artículos en la Web y Blogs

- Garcíadiego, Alejandro R., *Proyectos de trabajo: Bertrand Russell y el origen de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Mathesis Vol. IV/Nº1 febrero 1988.
- Garcíadiego, Alejandro R., *Proyectos de trabajo: Cuestionando la influencia de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Mathesis Vol. VII/Nº4 noviembre 1991.
- López Arnal, Salvador, *Russell un intelectual británico, entrevista a Huberto Marraud*, El viejo topo, mayo 2009.
- Wikipedia: *Bertrand Russell*.
- Blog: *El Topo Lógico,* http://eltopologico.blogspot.com.es/

[115] No debemos confundir estas funciones predicativas con las funciones predicativas que crean clases tal como hemos visto al inicio de la exposición en las páginas 5 y 6.

[116] Torretti*, El paraíso de Cantor,* pág 198